J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
13 (1978) 559-576

REGULARITE POUR $\bar{\partial}$ DANS QUELQUES DOMAINES FAIBLEMENT PSEUDO-CONVEXES

M. DERRIDJ

1. Introduction

Dans un récent article [1], M. Derridj et D. Tartakoff ont montré la régularité analytique globale des solutions du problème de Neumann pour $\bar{\partial}$ dans des domaines bornés, à frontière analytique réelle tels que,

(1) la forme de Levi est non dégénérée,

(2) une estimation à priori est satisfaite,

(3) il y a une estimation sous-elliptique.

Les domaines strictement pseudo-convexes vérifient toutes ces conditions. Signalons que dans le cas d'un domaine de C^n, G. Komatsu a aussi obtenu le résultat [8].

Dans cet article nous commençons par caractériser les domaines pseudo-convexes à frontières C^∞, qui vérifient l'estimation (2) par une condition algébrique portant sur la forme de Levi.

Cette condition est la suivante: soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}$ les valeurs propres de la forme de Levi et T sa trace ($T = \sum \lambda_i$), alors il existe une constante C telle que $\lambda_i \geq CT$, $i = 1, \cdots, n-1$, au voisinage de $\partial\Omega$.

Nous montrons, géométriquement, que tout domaine borné de cette classe, à frontiére analytique réelle vérifie une estimation sous-elliptique. En particulier tout domaine borné peudo-convexe de C^2 à fronière analytique réelle vérifie une estimation sous-elliptique (ce résultat dans C^2 a été montré par d'autres méthodes dans [6]).

Nous considérons ensuite une sous-classes particulière de domaines de cette classe telle que la forme de Levi dégénère, mais vérifiant un lemme de commutation qui permette d'avoir la régularité analytique globale pour le "$\bar{\partial}$-Neumann problem".

Finalement nous étudions une classe très particulière de domaines qui ne vérifient ni la condition (1) ni la condition (2) et nous montrons qu'on obtient tout de même la régularité analytique globale. Cette étude particulière est intéressante dans la mesure où elle montre qu'il suffit d'un lemme de commutation faible (beaucoup moins fort que celui que l'on obtient dans les cas précédents) pour obtenir la régularité analytique globale. On obtient en particulier

Communicated by J. J. Kohn, November 15, 1976.

que tout domaine de la forme: $\{|z_1|^{2p} + |z_2|^{2q} - 1 < 0\}$ dans C^2 convient pour la régularité analytique globale.

Je remercie les projesseurs L. Boutet de Monvel et J. J. Kohn pour leurs nombreuses remarques.

2. Quelques définitions et notations

Pour ample information nous renvoyons à [2]. Soit Ω un ouvert pseudo-convexe de C^n donné par

$$\Omega = \{r < 0\} \text{ où } r \text{ est analytique réelle, } dr = 1 \text{ pour } r = 0 \text{ et } \bar{\Omega} \text{ est compact .}$$

Considérons les champs de vecteurs holomorphes, au voisinage d'un point $P \in \partial\Omega$ où $\partial r/\partial z_n \neq 0$ (ce qu'on peut toujours supposer)

$$L_i = \frac{\partial r}{\partial z_i}\frac{\partial}{\partial z_n} - \frac{\partial r}{\partial z_n}\frac{\partial}{\partial z_i}, \qquad i = 1, \cdots, n-1,$$
$$L_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial r}{\partial \bar{z}_i}\frac{\partial}{\partial z_i}.$$

alors les champs $L_1, \cdots, L_{n-1}, (L_n - \bar{L}_n)$ sont tangents à $\partial\Omega$. Il en est de même de $\bar{L}_1, \cdots, \bar{L}_{n-1}$. On peut ecire alors

$$[L_i, \bar{L}_j] = \alpha_{ij}(L_n - \bar{L}_n) + \sum_{k=1}^{n-1} a_{i,j,k}L_k + \sum_{k=1}^{n-1} b_{i,j,k}\bar{L}_k, \qquad i, j = 1, \cdots, n-1.$$

La matrice $(\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n-1}$ est la matrice de Lévi.

Si le système $(\bar{\omega}_1, \cdots, \bar{\omega}_n)$ de (0, 1) formes est dual du système $(\bar{L}_1, \cdots, \bar{L}_n)$, alors $\bar{\partial}$ est défini sur toute fonction u par

$$\bar{\partial}u = \sum_{i=1}^{n} (\bar{L}_i u)\bar{\omega}_i$$

et sur toute (0, 1) forme $u = \sum_{i=1}^{n} u_i\bar{\omega}_i$ par

$$\bar{\partial}u = \sum_{j<i} (\bar{L}_j u_i - \bar{L}_i u_j)\bar{\omega}_j \wedge \bar{\omega}_i + \cdots ; \qquad \bar{\partial}^2 = 0.$$

Les pointillés désignant des termes où u_i n'est pas dérivée. L'adjoint $\bar{\partial}^*$ est défini par la fermeture de:

$$\operatorname{Dom}(\bar{\partial}^*) = \left\{u = \sum_{1}^{n} u_i\bar{\omega}_i,\ u_n = 0 \text{ sur } \partial\Omega\right\},$$

Ainsi

$$(\bar{\partial}^* u, v) = (u, \bar{\partial} v) .$$

On désigne par $\mathscr{D}^{0,1}$ le domaine de $\bar{\partial}^*$, et par

$$\mathscr{D}^{0,1}(\bar{\Omega}^* \cap V) = \{u \in \mathscr{D}^{0,1} \operatorname{supp} u \subset \bar{\Omega} \cap V\}$$

où V est un voisinage d'un point du bord.

Nous cherchons à caractériser les domaines faiblement pseudo-convexes pour lesquels on a l'estimation

$$* \qquad \sum_{i=1}^{n} \|\bar{L}_i u\| + \sum_{i=1}^{n-1} \|L_i u\| \leq C(\|\bar{\partial} u\| + \|\bar{\partial}^* u\| + \|u\|) , \quad \forall u \in \mathscr{D}^{0,1}(\bar{\Omega} \cap V) .$$

3. Un théorème

Théorème 3.1. *Soient $\mathscr{M}$ la matrice de* Lévi *T sa trace et $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}$ ses valeurs propres. Supposons que Ω est pseudo-convexe. L'estimation $*$ est vérifiée si et seulement si il existe $A > 0$ telle que*

$$(3.1) \qquad \lambda_i \geq AT \quad \text{sur } V \cap \partial\Omega , \qquad i = 1, \cdots, n-1 .$$

La démonstration du théorème nécessite l'utilisation de deux lemmes; Nous donnons une démonstrtion de ces deux lemmes, quoique le premier soit bien connu.

Lemma 3.2. *Soit $P(x, \lambda) = \lambda^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(x)\lambda^j$ un polynôme en λ à coefficients $a_j(x)$ de classe C^∞ dans un ouvert W de $\boldsymbol{R}^q$. Notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les racines (continues) de P. Alors $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont de classe C^∞ dans un ouvert partout dense dans W.*

Démonstration. Soit λ_1 une racine (continue de P). On va montrer qu'il existe un sous-ouvert $W^1 \subset W$ dans lequel λ_1 est de classe C^∞, ce qui est suffisant pour montrer le lemme.

Si $n = 1$, le lemme est trivial. Supposons le lemme vrai pour $(n - 1)$. Si la racine λ_1 est simple en $x_0 \in W$, alors le théorème des fonctions implicites assure que λ_1 est C^∞ dans un voisinage de x_0. Si λ_1 est une racine multiple partout, alors λ_1 est racine du polynôme $P'_\lambda(x, \lambda)$ qui est de degré $(n - 1)$ et la récurrence donne le résultat.

Lemma 3.3. *Soit $A(x)$ une matrice carrée d'ordre p à coefficients C^∞ dans W. Supposons que det $A(x) = 0$, $\forall x \in W$. Il existe un ouvert non vide $W' \subset W$ tel que: il existe $u(x) \in (C^\infty(W'))^p$ tel que $A(x)u(x) = 0$ et $u(x) \neq 0$, $\forall x \in W'$.*

Démonstration. Il existe un ouvert non vide $W' \subset W$ dans lequel A est de rang constant q (nécessairement $q < p$). Soit $W'' \subset W'$ avec un mineur maximal nonnul sur W''.

Alors $A(x)u(x) = 0$ se réduit dans W'' à q équations à p inconnues linéairement indépendantes: les solutions $u_1(x), \cdots, u_q(x)$ s'expriment (en renumérotant au besoin) en fonction des coefficients de $A(x)$ et de $u_{q+1}, \cdots, u_p$ fixés arbitrairement, par exemple constants. Ce qui entraîne que $u(x)$ ainsi choisi (non nul) est de classe C^∞ dans W'.

Démonstration du théorème. (a) *La condition* (3.1) *est suffisante.* D'après [5] nous savons que

$$\sum_{j=1}^{n} \|\bar{L}_j u\| \leq C(\|\bar{\partial} u\| + \|\bar{\partial}^* u\| + \|u\|) , \qquad \forall u \in \mathscr{D}^{0,1}(V \cap \bar{\Omega}) . \tag{3.2}$$

Soit (i, k) un couple dans $\{1, \cdots, (n-1)\}^2$: Alors

$$\begin{aligned} \|L_i u_k\|^2 &= (L_i u_k, L_i u_k) = -(\bar{L}_i L_i u_k, u_k) + (a_i L_i u_k, u_k) \\ &= ([L_i, \bar{L}_i] u_k, u_k) + \|\bar{L}_i u_k\|^2 + 0(\|u\| \, \|\bar{L} u\|) , \qquad a_i \in C^\infty(\bar{\Omega} \cap V) . \end{aligned}$$

Si nous utilisons l'expression de $[L_i, \bar{L}_i]$ en fonction de $L_n - \bar{L}_n, L_1, \cdots, L_{n-1}, \bar{L}_1, \cdots, \bar{L}_{n-1}$ et intégrons par parties on obtient

$$\|L_i u_k\|^2 = \int_{\partial\Omega} \alpha_{ii} |u_k|^2 + 0(\|u\|^2 + \|\bar{L} u\|^2) . \tag{3.3}$$

Maintenant la condition (3.1) entraîne que

$$\int_{\partial\Omega} \alpha_{ii} |u_k|^2 \leq C \int_{\partial\Omega} \sum_{i,j=1}^{n-1} \alpha_{ij} u_i \bar{u}_j . \tag{3.4}$$

De plus la pseudo-convexité entraîne l'inégalité (voir [5])

$$\int_{\partial\Omega} \sum_{i,j=1}^{n-1} \alpha_{ij} u_i \bar{u}_j \leq C(\|\bar{\partial} u\|^2 + \|\bar{\partial}^* u\|^2 + \|u\|^2) . \tag{3.5}$$

Alors (3.3), (3.4) et (3.5) entraînent le résultat.

(b) *La condition* 3.2. *est nécessaire.* Prenons $u = \sum_{i=1}^{n-1} u_i \bar{\omega}_i$ et calculons $\|\bar{\partial} u\|^2$ et $\|\partial^* u\|^2$:

$$\|\bar{\partial} u\|^2 = \sum_{k<i<n} \|\bar{L}_k u_i - \bar{L}_i u_k\|^2 + \sum_{k<n} \|\bar{L}_n u_k\|^2 + 0(\|u\|^2 + \|\bar{L} u\|^2) ,$$

$$\|\bar{\partial}^* u\|^2 = \left\| \sum_1^{n-1} L_i u_i \right\|^2 = \left(\sum_1^{n-1} L_j u_j, \sum_1^{n-1} L_i u_i \right); \text{ mais}$$

$$\begin{aligned} (L_j u_j, L_i u_i) &= -(\bar{L}_i L_j u_j, u_i) + 0(\|u\|^2 + \|\bar{L} u\|^2 \\ &= ([L_j, \bar{L}_i] u_j, u_i) + 0(\|u\|^2 + \|\bar{L} u\|^2) \\ &= \int_{\partial\Omega} \alpha_{ji} u_j \bar{u}_i + 0(\|u\|^2 + \bar{L} u\|^2) . \end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons

$$\|\bar{\partial} u\|^2 + \|\bar{\partial}^* u\|^2 = \sum_{i,k=1}^{n-1} \int_{\partial\Omega} \alpha_{ik} u_i \bar{u}_k + 0(\|u\|^2 + \|\bar{L} u\|^2) . \tag{3.6}$$

L'inégalité $*$ entraine alors, en utilisant (3.3)

$$\int_{\partial\Omega} \alpha_{ii}|u_k|^2 \leq C_0\Big(\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\partial\Omega}\alpha_{i,j}u_i\bar u_j + \|u\|^2 + \|\bar L u\|^2\Big) \tag{3.7}$$

où C_0 est une constante convenable.

Si nous sommons sur i, k nous obtenons alors, avec une nouvelle constante $C_1 > 0$,

$$\int_{\partial\Omega} T|u|^2 - C_1\sum_{i,j=1}^{n-1}\alpha_{ij}u_i\bar u_j \leq C_1(\|u\|^2 + \|\bar L u\|^2)\,. \tag{3.8}$$

Considérons d'abord le cas où la matrice de Lévi est diagonale; si nous choisissons $u = u_i\bar\omega_i$ nous aurons alors

$$\int_{\partial\Omega} T|u_i|^2 - C_1\alpha_{ii}|u_i|^2 \leq C_1(\|u_i\|^2 + \|\bar L u_i\|^2)\,, \qquad \forall u_i \in \mathscr{D}(V \cap \bar\Omega)\,. \tag{3.9}$$

L'inégalité (3.9) entraîne que $T \leq C_1\lambda_{ii}$ sur $(V \cap \partial\Omega)$. En effet supposons qu'il existe V_1 tel que $T - C_1\lambda_{ii} \geq b > 0$ dans $V_1 \cap \partial\Omega$. Il existerait une constante $k > 0$ telle que

$$\int_{\partial\Omega}|\varphi|^2 \leq k(\|\varphi\|^2 + \|\bar L\varphi\|^2)\,, \qquad \forall\varphi \in \mathscr{D}(V_1 \cap \bar\Omega)\,,$$

ce qui ne peut être vrai, puisque Ω est pseudo-convexe.

Comme dans ce premier cas les valeurs propres sont les λ_{ii}, la nécessité est montrée dans ce cas.

Passons maintenant au cas général et travaillons dans un petit voisinage d'un point de $\partial\Omega$. Soit V; soit λ une valeur propre continue de $\mathscr{M}$. Il existe un ouvert $V_1 \subset V$ tel que λ soit de classe C^∞ dans $V_1 \cap \partial\Omega$ (lemme 3.2). Posons

$$A(x) = \mathscr{M}_0(x) - \lambda(x)I\,;$$

alors $\det A(x) = 0$, $\forall x \in V_1$ et $A(x)$ est à coefficients C^∞ dans V_1. D'après le lemme (3.3), il existe un ouvert $V_2 \subset V_1$ tel que: il existe

$$u(x) = u_1(x)\bar\omega_1 + \cdots + u_{n-1}(x)\bar\omega_n$$

de classe C^∞ dans $V_2 \cap \partial\Omega$ avec $A(x)u(x) = 0$ dans $V_2 \cap \partial\Omega$ et $u(x) \neq 0$.

Donc $u(x)$ est un vecteur propre de $\mathscr{M}$, de classes C^∞ et non nul dans $V_2 \cap \partial\Omega$. Par prolongement nous pouvons supposer que $u \in \mathscr{D}(\bar V_2 \cap \bar\Omega)$ (quite à prendre V_2 plus petit au besoin). D'autre part on peut supposer (endivisant par $|u|^2$) que $|u|^2 = 1$ dans $V_2 \cap \bar\Omega$. Soit $\varphi \in \mathscr{D}(V_2 \cap \bar\Omega)$ quelconque. Alors $\varphi u = (\varphi u_1, \cdots, \varphi u_{n-1})$ est aussi un vecteur propre de $\mathscr{M}(x)$ dans $V_2 \cap \partial\Omega$ correspondant à $\lambda(x)$. Par suite (3.8) donne

$$(3.10)\quad \int_{\partial\Omega} (T - C_1\lambda)\,|\varphi u|^2 \leq C_1(\|\varphi u\|^2 + \|\bar{L}(\varphi u)\|^2)\,, \qquad \forall\varphi \in \mathscr{D}(V_2 \cap \bar{\Omega})\,.$$

En utilisant que $|u|^2 = 1$ sur $\partial\Omega$ et que $u \in C^\infty(\bar{V}_2 \cap \bar{\Omega})$, nous obtenons

$$(3.11)\quad \int_{\partial\Omega} (T - C_1\lambda)\,|\varphi|^2 \leq K(\|\varphi\|^2 + \|\bar{L}(\varphi)\|^2)\,, \qquad \forall\varphi \in \mathscr{D}(V_2 \cap \bar{\Omega})\,.$$

Ce qui entraine de nouveau

$$T - C_1\lambda \leq 0 \qquad \text{dans } V_2 \cap \partial\Omega\,.$$

Résumons. Soit $x_0 \in \partial\Omega$. Tout voisinage V de x_0 contient un ouvert V' non vide tel que

$$T - C_1\lambda \leq 0 \qquad \text{dans } V' \cap \partial\Omega\,.$$

Mais $T - C_1\lambda$ est continue. Donc $(T - C_1\lambda)(x_0) \leq 0$. D'où le résultat cherché.

Exemples. Il est immédiat que si $n = 2$ la condition (3.1) est toujours vérifiée. Nous allons exhiber une classe de domaines (très particulière) dans C^n qui vérifient (3.1).

Soit Ω défini par $\Omega = \{(z_n, z') \in C^n, |z_n|^2 + |z'|^{2p} - 1 < 0\}$; $p \in N, p \geq 1$.

Proposition. *l'ouvert Ω vérifie la condition* (3.1).

Démonstration. On prendra $p \geq 2$ (sinon Ω est la boule). D'autre part pour la clarté des calculs on prendra $n = 3$.

Nous commençons par remarquer qu'il y a stricte pseudo-convexité aux points en lesquels $z' \neq 0$. Plaçons-nous donc au voisinage d'un point tel que $z_n \neq 0$. Donc dans ce voisinage $z_n \neq 0$. Considérons alors les champs holomorphes L_1, L_2, L_3 donnés par

$$L_1 = \bar{z}_3\frac{\partial}{\partial z_1} - p\bar{z}_1\,|z'|^{2p-2}\frac{\partial}{\partial z_3}\,,$$

$$L_2 = \bar{z}_3\frac{\partial}{\partial z_2} - p\bar{z}_2\,|z'|^{2p-2}\frac{\partial}{\partial z_3}\,,$$

$$L_3 = pz_1\,|z'|^{2p-2}\frac{\partial}{\partial z_1} + pz_2\,|z'|^{2p-2}\frac{\partial}{\partial z_3} + z_3\frac{\partial}{\partial z_3}\,.$$

Déterminons la matrice de Lévi:

$$\alpha_{11} = \langle\partial\bar{\partial}r, L_1 \wedge \bar{L}_1\rangle = p\,|z'|^{2p-4}\,\{|z_3|^2(|z'|^2 + (p-1)\,|z_1|^2) + p\,|z_1|^2\,|z'|^{2p}\}\,,$$

$$\alpha_{22} = \langle\partial\bar{\partial}r, L_2 \wedge \bar{L}_2\rangle = p\,|z'|^{2p-4}\,\{|z_3|^2(|z'|^2 + (p-1)\,|z_2|^2) + p\,|z_2|^2\,|z'|^{2p}\}\,,$$

$$\alpha_{12} = \langle\partial\bar{\partial}r, L_1 \wedge \bar{L}_2\rangle = p\,|z'|^{2p-4}\,\{|z_3|^2\,p(p-1)z_1z_2 + pz_1z_2\,|z'|^{2p}\}\,.$$

$$\alpha_{21} = \bar{\alpha}_{12}\,.$$

Il suffit de montrer que la matricé suivante vérifie (3.1)

$$\begin{pmatrix} |z'|^2 + (p-1)|z_1|^2 & (p-1)\bar z_1 z_2 \\ (p-1) z_1 \bar z_2 & |z'|^2 + (p-1)|z_2|^2 \end{pmatrix}.$$

En effet les quantités

$$p|z_1|^2|z'|^{2p}, \quad p|z_2|^2|z'|^{2p}, \quad p\bar z_1 z_2 |z'|^{2p}$$

sont négligeables devant les autres termes au voisinage de $z' = 0$. La trace de cette matrice est $(p+1)|z'|^2$. Si $\sigma > 0$ est assez petit, alors

$$[|z'|^2(1-\sigma(p+1) + (p-1)|z_1|^2][|z'|^2(1-\sigma(p+1)) + (p-1)|z_2|^2] \\ - (p-1)^2 |z_1|^2|z_2|^2$$

est positif. D'où le résultat.

4. Estimation sous-elliptique

Nous allons démontrer le théorème suivant.

Théorème 4.1. *Soit Ω un ouvert borné pseudo-convexe à frontière analytique réelle satisfaisant la condition* (2.1). *Alors Ω satisfait en tout point du bord $\partial\Omega$, à une estimation sous-elliptique.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que, P étant un point du bord, il existe un voisinage V de P et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\|u\|_\varepsilon \leq C(\|\bar\partial u\| + \|\bar\partial^* u\| + \|u\|), \qquad u \in \mathscr{D}^{0,1}(V \cap \bar\Omega).$$

La démonstration découlera des 2 propositions sui vantes.

Proposition 4.2. *Supposons que l'algèbre de Lie engendrée par les champs $(L_1, \cdots, L_{n-1}, \bar L_1, \cdots, \bar L_{n-1})$ est de rang $2n-1$ (i. e., de rang maximal). Alors il existe V et ε tels que*

$$\|u\|_\varepsilon \leq C(\|\bar\partial u\| + \|\bar\partial^* u\| + \|u\|), \qquad u \in \mathscr{D}^{0,1}(V \cap \bar\Omega). \tag{4.1}$$

Démonstration. En fait, on peut montrer aisément en utilisant des travaux de J. J. Kohn [2] et L. Hormander [7] que l'on a

$$\|u\|_\varepsilon \leq C\left(\sum_{i=1}^{n-1} \|L_i u\| + \sum_{i=1}^{n} \|\bar L_i u\| + \|u\|\right), \qquad u \in \mathscr{D}^{0,1}(V \cap \bar\Omega).$$

Comme Ω vérifie la condition 2.1., alors (4.1) en découle.

Proposition 4.3. *Soit Ω vérifiant les conditions du théorème* 4.1. *Alors l'algèbre de Lie engendrée par $(L_1, \cdots, L_{n-1}, \bar L_1, \cdots, \bar L_{n-1})$ est de rang maximal au point P.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde et supposons que l'algèbre de Lie est de rang $(2n-2)$ au point P (en effet comme $L_1, \cdots, L_{n-1}, \bar L_1, \cdots, \bar L_{n-1}$ sont tous indépendants le rang est au moins $(2n - 2)$). Il découle d'un théorème de Nagano [9] (voir aussi Zachmanoglou [10]) qu'il existe au voisinage de P une variété analytique réelle X' contenue dans $\partial\Omega$, de dimension $2n - 2$ telle que les champs $L_1, \cdots, L_{n-1}, \bar{L}_1, \cdots, \bar{L}_{n-1}$, soient tangents à X. Par suite X est une variété analytique complexe, contenue dans $\partial\Omega$. Ceci contredit le fait que Ω est borné et $\partial\Omega$ analytique réelle. Donc le rang de l'algèbre de Lie $\mathscr{L}(L_1, \cdots, L_{n-1}, \bar{L}_1, \bar{L}_{n-1})$ est $2n - 1$.

Corollaire 4.4. *Soit Ω un ouvert borné pseudo-convexe à frontière analytique réelle dans $\boldsymbol{C}^2$. Alors Ω satisfait en tout point de $\partial\Omega$ à une estimation souselliptique.*

En effet dans $\boldsymbol{C}^2$, la condition 2.1. est toujours satisfaite. Ce résultat dans $\boldsymbol{C}^2$ a été démontré dans [6] par d'autres méthodes, en utilisant en particulier des séries.

Corollaire 4.5. *Si Ω est un ouvert borné pseudo-convexe à frontière analytique réelle vérifiant la condition* 2.1 (*sans condition* 2.1. *dans* $\boldsymbol{C}^2$), *alors on a la régularité C^∞ locale dans $\bar{\Omega}$ pour la solution du probleème de Neumann.*

5. Le théorème de commutation

Nous savons que si $\bar{\Omega}$ est compact à frontière analytique réelle tel que la forme de Lévi est non dégénérée, il existe un champ de vecteurs global T tangent à $\partial\Omega$ qui commute convenablement avec $\bar{\partial}$ et $\bar{\partial}^*$. Ici nous montrons que si une certaine hypothèse est vérifiée (hypothèse plus faible que la non dégénérescence de la forme de Lévi) alors on obtient un lemme de commutation qui permet de démontrer la régularité analytique globale.

En fait comme $[= \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}]$ est un opérateur elliptique, il suffit de montrer le résultat de commutation sur $\partial\Omega$. Définissons α_{ij}, $i, j = 1, \cdots, n$ par

$$[L_i, \bar{L}_j] = \alpha_{ii} L_n + \cdots ,$$

$(\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n-1}$ n'est autre que la forme de Lévi.

Proposition 5.1. *Supposons que $\bar{\Omega}$ soit compact et $\partial\Omega$ analytique réelle. Supposons de plus que*:

(a) *det* $(\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n} = 0$,

(b) *il existe des fonctions α_j analytiques réelles, uniques, au voisinage dans $\partial\Omega$ d'un point de $\partial\Omega$ telles que*

$$\alpha_{ni} + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \alpha_{ji} = 0;\ i = 1, \cdots, n - 1 , \qquad sur\ \partial\Omega . \tag{5.1}$$

Alors il existe un champ global $\tilde{T}$ au voisinage de $\partial\Omega$ tel que

$$[\tilde{T}, L_i]|_{\partial\Omega} \in \{L_1, \cdots, L_{n-1}, \bar{L}_1, \cdots, \bar{L}_n\} , \qquad i = 1, \cdots, n ,$$
$$[\tilde{T}, \bar{L}_i]|_{\partial\Omega} \in \{L_1, \cdots, L_{n-1}, \bar{L}_1, \cdots, \bar{L}_n\} , \qquad i = 1, \cdots, n ,$$

$\tilde{T}$ est tangentiel.

Démonstration. Nous allons d'abord déterminer T sur $\partial\Omega$. Localement sur $\partial\Omega$ posons:

$$T = L_n - \bar{L}_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j L_j - \sum_{j=1}^{n-1} \bar{\alpha}_j \bar{L}_j \qquad \text{sur } \partial\Omega \ ,$$

où α_j sont les fonctions du (b) données sur $\partial\Omega$. Comme les fonctions α_j sont (localement) uniques, cela détermine T globalement sur $\partial\Omega$. La condition (b) assure en fait que l'on a, où $|_{L_n}$ désigne la composante sur L_n:

$$[T, \bar{L}_i]|_{L_n} = \alpha_{ni} + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \alpha_{ji} = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega,\ i = 1, \cdots, n-1\ .$$

D'autre part le fait que T et L_i, $i = 1, \cdots, n-1$, sont tangentiels entraîne aussi

$$[T, \bar{L}_i]|_{\bar{L}_n} = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega,\ i = 1, \cdots, n-1\ .$$

De cette dernière égalité on tire alors, puis T est imaginaire pure:

$$[T, L_i]|_{L_n} = [\bar{T}, \bar{L}_i]|_{\bar{L}_n} = -[T, \bar{L}_i]|_{\bar{L}_n} = 0$$
$$\text{sur } \partial\Omega,\ i = 1, \cdots, n-1\ .$$

Soit $\tilde{T}$ un prolongement analytique réel de T à un voisinage de $\partial\Omega$, i.e.,

$$\tilde{T} = T + \theta S \text{ où } \theta = 0 \text{ sur } \partial\Omega,\ S \text{ champ de vecteurs}\ .$$

Alors

$$[\tilde{T}, \bar{L}_i] = [T, \bar{L}_i] + [\theta S, \bar{L}_i] \Rightarrow [\tilde{T}, \bar{L}_i]|_{L_n} = 0$$
$$\text{sur } \partial\Omega,\ i = 1, \cdots, n-1\ ,$$
$$[\tilde{T}, L_i]|_{L_n} = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega,\ i = 1, \cdots, n-1\ .$$

Maintenant, comme, dans [1], la condition (a) assure que $[\tilde{T}, \bar{L}_n]|_{L_n} = [\tilde{T}, L_n]|_{L_n} = 0$ sur $\partial\Omega$. La proposition est ainsi montrée.

Proposition 5.2. *Soit, au voisinage V_p de tout point $P \in \partial\Omega$, un système $L_1, \cdots, L_n$ (L_n global) tel que: il existe dans V_p des fonctions analytiques réelles α_j, uniques telles que*

$$\alpha_{ni} + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \alpha_{ji} = 0 \qquad \text{dans } V_p,\ i = 1, \cdots, n-1\ .$$

Alors il existe L'_n (global), au voisinage de $\partial\Omega$ tel que

(a) *det* $(\alpha'_{ij}) = 0$,

(b) $\alpha'_{ni} + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \alpha'_{ji} = 0$ *sur* $V_p \cap \partial\Omega$, $i = 1, \cdots, n-1$.

Démonstration. Si on pose $L'_i = L_i$, $i = 1, \cdots, n-1$, et L'_n le champ cherché α'_{ij} est défini par $[L'_i \bar{L}'_j] = \alpha'_{ij} L'_n + \cdots$. Cherchons L'_n sous la forme $L'_n = \varphi L_n$, on va chercher φ globale sur un voisinage de $\partial\Omega$ avec $\varphi = 1$ sur $\partial\Omega$. Calculons α'_{ij}:

$$\begin{aligned}
\alpha'_{ij} &= \varphi^{-1}\alpha_{ij}\,, && i, j < n\,,\\
\alpha'_{in} &= \bar{\varphi}\varphi^{-1}\alpha_{in}\,, && i < n\,,\\
\alpha'_{ni} &= \alpha_{ni} - \varphi^{-1}\bar{L}_i(\varphi)\,, && i < n\,,\\
\alpha'_{nn} &= \bar{\varphi}\alpha_{nn} - \bar{\varphi}\varphi^{-1}\bar{L}_n(\varphi)\,.
\end{aligned}$$

Alors det $(\alpha'_{ij}) = 0$ si le déterminant suivant est nul:

$$\begin{vmatrix}
\alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\
\cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_{n-1,n} \\
\varphi^{\alpha}_{n1} - \bar{L}_1(\varphi) & \cdots & \varphi^{\alpha}_{nn} - \bar{L}_n(\varphi)
\end{vmatrix} = 0\,.$$

Désignons par δ_i le mineur obtenu en enlevant la i^e colonne et la dernière ligne. Alors δ_n n'est autre que le déterminant de la forme de Lévi. L'hypothèse disant qu'il existe des fonctions uniques α_j telles que

$$\alpha_{ni} + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \alpha_{ji} = 0\,, \qquad i = 1, \cdots, n-1\,,$$

exprime que δ_i, $i = 1, \cdots, n-1$, est divisible par δ_n et $\alpha_i = \delta_i/\delta_n$. Ecrire que le déterminant précédent est nul, c'est avoir l'équation

$$\varphi\alpha_{nn} - \bar{L}_n(\varphi) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i(\varphi\alpha_{ni} - \bar{L}_i(\varphi)) = 0 \qquad \text{dans } V_p\,.$$

De plus $\varphi = 1$ sur $\partial\Omega \cap V_p$. Ceci peut se résoudre de façon unique d'après Cauchy-Kovalevski dans un voisinage de P; en recollant on obtient φ globale comme dans [1].

Il reste à montrer (b). Comme $\varphi = 1$ sur $\partial\Omega$ on a $\alpha'_{ij} = \alpha_{ij}$ sur $\partial\Omega$, $i, j = 1, \cdots, n$. Donc sur $\partial\Omega$

$$\alpha'_{ni} + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \alpha'_{ji} = \alpha_{ni} + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \alpha_{ji} = 0\,.$$

Remarque. L'existence du Champ $\tilde{T}$ permet de démontrer l'analycité globale lorsqu'on a une estimation sous-elliptique, ce qui est le cas pour la classe $\Omega = \{(z_n, z') \in C^n, |z_n|^2 + |z'_n|^{2p} - 1 < 0\}$, et la condition (3.1).

Nous allons maintenant montrer que ces derniers ouverts vérifiant les hypothèses de la proposition 4.2.

Proposition 5.3. *L'ouvert* $\Omega = \{(z_n, z') \in C^n \mid |z_n|^2 + |z'|^{2p} - 1 < 0\}$ *vérifie les hypothèses de la proposition* 4.2.

Démonstration. De nouveau, pour la clerté des calculs prenons $n = 3$. Le déterminant δ_3 de la forme de Lévi est égal (calcul élémentaire) à: $\delta_3 = |z|^{4p-4}\,\delta_3'$ où $\delta_3' \neq 0$ au voisinage d'un point de $\partial\Omega$ où $z' = 0$ (là où la forme de Lévi dégénère). Il suffit alors de montrer que δ_1 et δ_2 contiennent $|z'|^{4p-4}$ en facteur. En utilisant les champs L_1, $\bar{L}_2$, $\bar{L}_3$ donnés en page 9, on calcule α_{13} ét α_{23}:

$$\alpha_{13} = \langle [L_1, \bar{L}_3], \partial r\rangle = p\bar{z}_1\bar{z}_3\,|z'|^{2p-2}\{-1 + p^2|z'|^{2p-2}\}\,,$$
$$\alpha_{23} = \langle [L_2, \bar{L}_3], \partial r\rangle = p\bar{z}_2\bar{z}_3\,|z'|^{2p-2}\{-1 + p^2|z'|^{2p-2}\}\,.$$

On obtient alors, α_{11} et α_{21} étant donnés en page 9,

$$\partial_2 = \begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{23}\end{vmatrix} = -p^2|z'|^{4p-6}|z_3|^4\begin{vmatrix}|z'|^2 + (p-1)|z_1|^2 & \bar{z}_1\\ (p-1)z_1\bar{z}_2 & \bar{z}_2\end{vmatrix} + |z'|^{4p-4}\,\delta_2'\,,$$

or

$$\begin{vmatrix}|z'|^2 + (p-1)|z_1|^2 & \bar{z}_1\\ (p-1)z_1z_2 & \bar{z}_2\end{vmatrix} = \bar{z}_2\begin{vmatrix}|z'|^2 + (p-1)|z_1|^2 & \bar{z}_1\\ (p-1)z_1 & 1\end{vmatrix} = |z'|^2\,\bar{z}_2\,.$$

Donc $\delta_2 = |z'|^{4p-4}\,\delta_2''$. De même $\delta_1 = |z'|^{4p-4}\,\delta_1''$.

L'unicité des α_j provient du fait que δ_3 s'annule seulement sur $z' = 0$.

Corollaire. *Soit* $\Omega = \{(z_n, z')\,|z^n|^2 + |z'|^{2p} - 1 < 0\}$. *Alors on a*

$$\Box u = f,\ \textit{conditions de Neumann} \Rightarrow u \in \mathscr{A}(\bar{\Omega}),\ f \in \mathscr{A}(\bar{\Omega})\,.$$

6. Etude particulière pour certains domaines ne vérifiant aucune des conditions (1) et (2)

Nous considérons les domaines donnés par des fonctions

$$r = |z_1|^{2p} + |z'|^2 - 1\,, \qquad \text{où } z' = (z_1, \cdots, z_{n-1})\,,$$

i.e.,

$$\Omega = \left\{|z_1|^{2p} + \sum_2^n |z_i|^2 - 1 < 0\right\} \qquad \text{avec } p \geq 2,\ p \in N\,.$$

Il est aisé de vérifier que Ω ne vérifie pas la conditition (2). Nous commençons par montrer que l'on a le lemme de commutation pour un tel domaine. Pour cela il suffit de vérifier les conditions de la proposition 5.2. En fait on le montre pour tout domaine circulaire

Proposition 6.1. *Tout domaine circulaire de C^N vérifie les hypothèses de la proposition* 5.2.

Démonstration. Soit

$$\Omega = \left\{ z \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} |z_i|^{2p_i} - 1 < 0, p_i \geq 1, p_i \in N \right\} .$$

On peut supposer qu'on se place au voisinage d'un point où $z_n \neq 0$. Alors

$$L_i = p_n \bar{z}_n |z|_n^{2(p_n-1)} \frac{\partial}{\partial z_i} - p_i \bar{z}_i |z_i|^{2(p_i-1)} \frac{\partial}{\partial z_n} , \qquad i = 1, \cdots, n-1 ,$$

$$L_n = \sum_{j=1}^{n} p_j z_j |z_j|^{2(p_j-1)} \frac{\partial}{\partial z_j} .$$

Pour la clarté des calculs, prenons $n = 3$; calculons $\alpha_{ji}, j, i \leq 2$:

$$\begin{aligned} \alpha_{ji} &= \langle \partial\bar{\partial} r, L_j \wedge \bar{L}_i \rangle \\ &= p_i p_j \bar{z}_j z_i |z_i|^{2(p_i-1)} |z_j|^{2(p_j-1)} p_n^2 |z_n|^{2(p_n-1)} , \qquad i \neq j , \\ \alpha_{ii} &= p_n^2 |z_n|^{4p_n-2} \cdot p_i^2 |z_i|^{2(p_i-1)} + p_i^2 |z_i|^{4p_i-2} p_n^2 |z_n|^{2(p_n-1)} \\ &= p_i^2 p_n^2 |z_i|^{2(p_i)} |z_n|^{2(p_n-1)} \{ |z_n|^{2p_n} + |z_i|^{2p_i} \} , \qquad i \leq 2. \end{aligned}$$

Ce calcul nous donne l'ensemble des points où la forme de Lévi dégénère. Il nous reste à calculer α_{13} et α_{23} (cas où $n = 3$):

$$\begin{aligned} \alpha_{13} &= \langle [L_1, \bar{L}_3], \partial r \rangle = p_1 p_3 \bar{z}_1 \bar{z}_3 |z_1|^{2(p_3-1)} |z_3|^{2(p_3-1)} A(z_1, z_3) , \\ \alpha_{23} &= \langle [L_2, \bar{L}_3], \partial r \rangle = p_2 p_3 \bar{z}_2 \bar{z}_3 |z_2|^{2(p_2-1)} |z_3|^{2(p_3-1)} B(z_1, z_3) . \end{aligned}$$

Il suffit, comme dans la page 14, de montrer que

$$\delta_2 \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{23} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \delta_1 = \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{vmatrix}$$

sont des multiples de $|z_1|^{2(_p{}^{1-1})} |z_2|^{2(p_2-1)}$, ce qui se voit immédiatement.

Corollaire 6.2. *Tout domaine circulaire vérifie le lemme de commutation.*

Malheureusement, les domaines circulaires (à part dans C^2) ne vérifient pas en général l'estimation (2). Par contre le domaine circulaire

$$\Omega = \{ |z_1|^{2p} + |z'|^2 - 1 < 0, z' = (z_2, \cdots, z_n \}$$

va vérifier certaines estimations qui nous permettront de conclure tout de même la régularité analytique globale.

Lemme 6.3. *Soit V un voisinage d'un point du bord tel que $z_n \neq 0$. Soient les champs*

$$L_1 = \bar{z}_n \frac{\partial}{\partial z_1} - p_1 \bar{z}_1 |z_1|^{2(p-1)} \frac{\partial}{\partial z_n} ,$$

$$L_i = \bar{z}_n \frac{\partial}{\partial z_i} - \bar{z}_i \frac{\partial}{\partial z_n} , \qquad i = 2, \cdots, n-1 ,$$

$$L_n = \sum_2^n z_j \frac{\partial}{\partial z_j} + p z_1 |z_1|^{2(p-1)} \frac{\partial}{\partial z_1} .$$

Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$(5.1) \qquad \|L_1 u_1\| + \sum_{\substack{j=1 \\ i=2,\cdots,n}}^{n-1} \|L_j u_i\| \leq C(\|\bar\partial u\| + \|\bar\partial^* u\| + \|u\|) , \qquad \forall u \in \mathscr{D}^{0,1}(V \cap \bar\Omega) .$$

En utilisant une intégration par parties et le fait que

$$\|\bar L u\| \leq C(\|\bar\partial u\| + \|\bar\partial^* u\| + \|u\|) , \qquad \forall u \mathscr{D}^{0,1}(V \cap \bar\Omega)$$

puisque Ω est pseudo-convexe, il suffit de montrer que

$$(5.2) \qquad \alpha_{11} |u_1|^2 \leq C \sum \alpha_{ij} u_i \bar u_j , \qquad |u_i|^2 \leq C \sum \alpha_{ij} u_i \bar u_j .$$

Le calcul donne

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= p^2 |z_1|^{2(p-1)} \{1 + |z_1|^{2p}\} , \\ \alpha_{1j} &= p \bar z_1 z_j |z_1|^{2(p-1)} , \qquad j = 2, \cdots, n-1 , \\ \alpha_{j1} &= p \bar z_1 z_j |z_1|^{2(p-1)} , \qquad j = 2, \cdots, n-1 , \\ \alpha_{ij} &= z_i \bar z_j , \qquad i, j = 2, \cdots, n-1 . \end{aligned}$$

La matrice $(\alpha_{ij})_{i,j=2}^{n-1}$ est définie positive. D'autre part la ligne et la colonne qui complètent $(\alpha_{ij})_{i,j=2}^{n-1}$ contiennent soit $z_1 |z_1|^{2(p-1)}$ soit $\bar z_1 |z_1|^{2(p-1)}$ en facteur sauf α_{11} qui contient $|z_1|^{2(p-1)}$ en facteur. Il est élémentaire d'en déduire que si V est convenanble, l'on a (5.2), donc (5.1).

Lemme 6.4. *On a l'estimation*

$$(5.3) \qquad \|\alpha_{11} L_j u_i\|^2 \leq C(\|\bar\partial u\|^2 + \|\bar\partial^* u\|^2 + \|u\|^2) , \qquad j = 2, \cdots, n-1 .$$

Démonstration. Pour cela, il suffit d'avoir

$$\alpha_{jj} \alpha_{11} |u_1|^2 \leq C \sum \alpha_{ij} u_i \bar u_j ,$$

ce qui découle de (5.2).

Lemme 6.5. *Posons $T = \bar L_n - L_n$, alors on a pour $i = 1, \cdots, n$,*

$$(5.4) \qquad [T, \bar L_i] = \sum_1^n \lambda_{j,i} L_j - (\text{modulo } \bar L) , \qquad \lambda_{ji} = C_{11} |\lambda'|_{ji} ,$$

et λ'_{ji} sont analytiques réelles dans V.

Démonstration. Notons $[T, \bar L_i]|_{\mathscr{H}}$ la composante holomorphe de $[T, \bar L_i]$. Si $i = 1$,

$$[T, \bar{L}_1]|_{\mathscr{H}} = [L_n, \bar{L}_i]|_{\mathscr{H}} = p(p-1)z_n z_1^2 |z_1|^{2(p-2)} \frac{\partial}{\partial z_1} ,$$

en remarquant que $|z_1^2|z_1|^{2(p-2)}| = |z_1|^{2(p-1)}$, le lemme en découle pour $i = 1$.
Si $i = 2, \cdots, n-1$,

$$[T, \bar{L}_i]|_{\mathscr{H}} = 0 ,$$
$$[T, L_n]_{\mathscr{H}} = [L_n, \bar{L}_n]|_{\mathscr{H}} = p^2(p-1)z_1^2 |z_1|^{2(2p-3)} \frac{\partial}{\partial z_1} ,$$

ce qui entraine le lemme.

Lemme 6.6. *Avec les mêmes notations, nous avons*

$$(5.5) \qquad [T, L_1] = \sum_1^n \mu_j L_j \qquad (modulo\ \bar{L}) ,$$

tels que $|\mu_j| = \alpha_{11}\mu'_j$, μ'_j *analytiques réelles dans* V *pour* $j = 2, \cdots, n$.

Démonstration. Un simple calcul donne

$$[L_1, L_n]|_{\mathscr{H}} = \{p^2(p-1)z_1|z_1|^{2(p-1)} \bar{z}_1^2 |z_1|^{2(p-2)} - p\bar{z}_1|z_1|^{2(p-1)}\} \frac{\partial}{\partial z_n}$$
$$+ p^2 \bar{z}_n |z_1|^{2(p-1)} \frac{\partial}{\partial z_1} ,$$
$$[\bar{L}_n, L_1]|_{\mathscr{H}} = \bar{z}_1 |z_1|^{2(p-1)} \times p^2 |z_1|^{2(p-1)} \frac{\partial}{\partial z_n} + \bar{z}_n \frac{\partial}{\partial z_1} .$$

Il reste à calculer les composantes de $\partial/\partial z_1$ sur les L_j en fait il faut montrer que les composantes de $\partial/\partial z_1$ $L_2, \cdots, L_n$ contiennent α_{11} en facterur. Pour simplifier les calculs prenons $n = 3$. Alors un calcul simple donne

$$\frac{\partial}{\partial z_1} = A(z)L_1 + pz_1|z_1|^{2(p-1)} [\bar{z}_2 L_2 - \bar{z}_3 L_3] ,$$

où $A(z) \neq 0$. D'où la conclusion.

Lemme 6.7. *Soit* φ *analytique réelle au voisinage de* $\partial\Omega$, $\varphi = 1$ *sur* $\partial\Omega$ *soit* $T' = \varphi L_n - \bar{\varphi}\bar{L}_n$. *Alors on a, Pour* $i = 1, \cdots, n-1$,

$$[T', \bar{L}_i]|_{\mathscr{H}} = \sum_1^n \lambda_{ji} L_j \qquad (modulo\ \bar{L}) ,$$

avec $|\lambda_{ji}| = \alpha_{11}\lambda'_{ji}$ *sur* $\partial\Omega \cap V$, λ'_{ji} *analytiques réelles dans* V,

$$[T', L_1]|_{\mathscr{H}} = \sum_1^n \mu_j L_j \qquad (modulo\ \bar{L}) ,$$

avec $|\mu_j| = \alpha_{11}\mu'_j$ *sur* $\partial\Omega \cap V$, μ'_j *analytiques réelles dans* V *pour* $j = 2, \cdots, n$.

Démonstration.

$$[T', \bar{L}_i]|_{\mathscr{H}} = \varphi[L_n, \bar{L}_i]|_{\mathscr{H}} - \bar{L}_j(\varphi)L_n \qquad \text{car } \varphi = 1 \text{ sur } \partial\Omega$$

sur $\partial\Omega \bar{L}_i(\varphi) = 0$. Donc $[T', \bar{L}_i]|_{\mathscr{H}} = \varphi[L_n, \bar{L}_i]|_{\mathscr{H}}$ sur $\partial\Omega$. D'autre part $[T', L_1]|_{\mathscr{H}} = [T', L_1]|_{\mathscr{H}}$ sur $\partial\Omega$. Le lemme découle alors du lemme précédent.

Nous savons maintenant, puisque Ω vérifie le lemme de commutation (corollaire 5.2) qu'il existe $\tilde{T}$ sous la forme

$$\tilde{T} = T' + \sum_1^{n-1} \alpha_j L_j - \sum_1^{n-1} \bar{\alpha}_j \bar{L}_j \qquad \text{sur } \partial\Omega\ ,$$

qui commute bien.

Malheureusement le lemme de commutation est insuffisant; nous allons montrer que l'on a mieux à savoir:

Lemme 6.8. *Soit $\tilde{T}$ le champ de vecteur global au voisinage de $\partial\Omega$ tel que*

$$\tilde{T} = T' + \sum_1^{n-1} \alpha_j L_j - \sum \bar{\alpha}_j \bar{L}_j\ ,$$

$$[\tilde{T}, \bar{L}_i]|_{L_n} = 0 \qquad \textit{sur } \partial\Omega,\ i = 1, \cdots, n\ ,$$

$$[\tilde{T}, L_i]|_{L_n} = 0 \qquad \textit{sur } \partial\Omega,\ i = 1, \cdots, n\ .$$

Alors on a $\alpha_j = \alpha_{11}\alpha'_j$ sur $\partial\Omega$, α'_j analytiques réelles.

Démonstration. En fait, nous savons que les α_j sont déterminés de manière unique sur $\partial\Omega$ par les conditions

$$[\tilde{T}, \bar{L}_i]|_{L_n} = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega, i = 1, \cdots, n-1\ ,$$

c'est-à-dire,

$$[\varphi L_n, \bar{L}_i]|_{L_n} + \sum_1^{n-1} \alpha_j [L_j, \bar{L}_i]|_{L_n} = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega,\ i = 1, \cdots, n-1\ .$$

Un calcul élémentaire nous donne

$$\lambda_{n,i} = \varphi[L_n, \bar{L}_i]|_{L_n} = \varphi\langle[L_n, \bar{L}_i]\, \partial r\rangle$$
$$= \begin{cases} -\varphi z_1 z_3 p^3 |z_1|^{4p-1}\ , & \text{si } i = 1\ , \\ 0\ , & \text{si } i = 2, \cdots, n-1\ . \end{cases}$$

Donc $\lambda_{ni} = \alpha_{11}^2 \lambda'_{ni}$ sur $\partial\Omega \cap V$.

Donc nous avons sur $\partial\Omega \cap V$

$$\alpha_{11}^2 \lambda'_{ni} + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \alpha_{ji} = 0\ , \qquad i = 1, \cdots, n-1\ .$$

On en déduit que $\alpha_j = \alpha_{11}\alpha'_j$ sur $\partial\Omega$.

Corollaire 6.9. *Soit $\tilde{T}$ le champ de vecteur du lemme 5.7. Alors*

$$\tilde{T}^k(\alpha_{11}) = \alpha_{11}A_k \qquad sur\ \partial\Omega \cap V ,$$

avec $\sup_{V\cap\partial\Omega}|A_k| \leq C^{k+1}k\,!$.

Démonstration. En fait le côté intéressant du corollaire vient du fait qu'on peut mettre α_{11} en facteur; car l'estimation viendra après du fait $\tilde{T}$ est analytique réel. Pour montrer qu'on a α_{11} en facteur, il suffit de le faire pour $k = 1$. D'après le lemme 5.7. il suffit de montrer que

$$T'(\alpha_{11}) = \alpha_{11}A_1 \qquad \text{ou encore } T(\alpha_{11}) = \alpha_{11}A_1 \text{ sur } \partial\Omega$$

car $T' = T$ sur $\partial\Omega$. Comme $\alpha_{11} = |z_1|^{2(p-1)}\alpha'_{11}$ avec $\alpha'_{11} \neq 0$, il suffit de montrer que $T(|z_1|^{2(p-1)})$ contient $|z_1|^{2(p-1)}$ en facteur. Comme $T = L_n - \bar{L}_n$ avec

$$L_n = \sum_2^n z_j\frac{\partial}{\partial z_j} + pz_1 z_1^{2(p-1)}\frac{\partial}{\partial z_1} ,$$

le résultat découle immédiatement. De tous les lemmes précédents on peut déduire le

Théorème 6.10. *Si (θ_j) est une partition de l'unité convenable d'un voisinage de $\partial\Omega$, il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\sum_1^N (\|\theta_j\bar{\partial}\tilde{T}^p u\| + \|\theta_j\bar{\partial}^*\tilde{T}^p u\| + \|\theta_j T^{p+1}u\|) \leq CC^p p! , \tag{6.7}$$

lorsque $\Box u = f \in \mathscr{A}(\bar{\Omega})$, et u vérifie les conditions de Neumann.

La démonstration est comme dans [1], si on utilise tous les lemmes précédents et le fait que

$$\bar{\partial}^* u = -\sum_{i=1}^n L_i u_i .$$

Du théorème 5.9 on déduit le

Théorème 6.11. *Nous avons l'estimation*

$$\|L^\alpha\tilde{T}^p u\| + \|\bar{L}^\alpha\tilde{T}^p u\| + \|T^{p+\alpha}u\| \leq C^{|\alpha|+p+1}(|\alpha| + p)! , \tag{6.8}$$

où C est une constante convenable.

Le théorème 5.1 découle du théorème 5.9. en utilisant la

Proposition 6.12. *Nous avons l'estimation*

$$\sum_1^n \|L_i u\| \leq C(\|\tilde{T}_u\| + \|\bar{\partial}u\| + \|\bar{\partial}^*u\| + \|u\|) , \qquad \forall u \in \mathscr{D}^{0,1}(V \cap \bar{\Omega}) . \tag{6.9}$$

Démonstration. Soit d'abord $i \in \{1, \cdots, n-1\}$. En fait, d'après le lemme

5.3., il suffit de montrer l'estimation (5.9) pour u_1. Par intégration par parties, on a

$$
\begin{aligned}
(6.10) \qquad & \|L_i u_1\|^2 \leq \|\bar{L}_i u_1\|^2 \\
& \quad + C\left(\int_{\partial\Omega} |u_1|^2 + \|u\|^2 + \varepsilon \sum_{i=1}^{n-1} \|L_i u_1\|^2 + \sum_1^n \|\bar{L}_i u_1\|\right),
\end{aligned}
$$

où ε est très petit. Donc en sommant sur i et en utilisant les estimations connues jusqu'ici on obtient

$$
\|L_i u_1\|^2 \leq C\left(\int_{\partial\Omega} |u_1|^2 + \|\partial u\|^2 + \|\bar{\partial}^* u\|^2 + \|u\|^2\right).
$$

Maintenant on sait que

$$
\tilde{T} = \varphi(L_n - \bar{L}_n) + \sum_1^{n-1} \alpha_i L_i - \sum_1^{n-1} \bar{\alpha}_i \bar{L}_i ,
$$

et α_i et $\bar{\alpha}_i$ contiennent α_{11} en facteur (i.e., $|z_1|^{2(p-1)}$).

Le champ de vecteurs $L_n + \bar{L}_n$ est réel et transversal à $\partial\Omega$: Donc

$$
\int_{\partial\Omega} |u_1|^2 \leq A(\|(L_n + \bar{L}_n)u_1\|^2 + \|u_1\|^2), \qquad u \in \mathscr{D}^{0,1}(V \cap \bar{\Omega}).
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} |u_1|^2 &\leq B\left(\|\tilde{T}u_1\|^2 + \|\bar{L}_n u_1\|^2 + \|u_1\|^2 + \varepsilon \sum_1^{n-1} \|L_i u_1\| + \sum_1^n \|\bar{L}_i u_1\|\right) \\
&\leq C(\|\tilde{T}u\|^2 + \|\bar{\partial} u\|^2 + \|\bar{\partial}^* u\|^2 + \|u\|^2)
\end{aligned}
$$

en utilisant (5.10). Si $i = n$,

$$
\|L_n u_1\|^2 \leq C\left(\|\tilde{T}u_1\|^2 + \|\bar{L}_n u_1\|^2 + \sum_1^{n-1} \|L_i u_1\|^2 + \sum_1^n \|\bar{L}_i u_1\|^2\right).
$$

D'où encore le résultat.

Le théorème (5.11) entraîne l'analycité de u dans $\bar{\Omega}$, lorsque f est analytique réelle dans $\bar{\Omega}$.

Quelques remarques. (1) Dans le cas de C^2, on sait alors qu'on a la régularité analytique globale pour tout domaine circulaire, parceque l'estimation (2) de l'introduction est alors vérifiée, et d'après le corollaire 5.2., on a aussi le lemme de commutation.

(2) Il serait alors intéressant de faire une étude analogue à la nôtre pour tout domaine circulaire dans C^n. Le corollaire 5.2. dit déjà qu'on a le théorème de commutation; il resterait alors à faire une étude au niveau des estimations.

(3) Estimation sous-elliptique: il est à remarquer que dans ce dernier ex-

emple, la forme de Levi a au plus une valeuɹ propre nulle, donc la forme de Levi est diagonalisable donc d'après [5], on a une estimation sous-elliptique.

Bibliographie

[1] M. Derridj & D. Tartakoff, *Sur la régularité analytique globale des solutions du problème de Neuman pour* $\bar{\partial}$ Séminaire Goulaouic-Schwartz, Ecole Polytech., Novembre 1976.

[2] G. B. Folland & J. J. Kohn, *The Neumann problem for the Cauchy-Riemann complex*, Annals of Math. Studies, No. 75, Princeton University Press, Princeton, 1972.

[3] J. J. Kohn, *Harmonic integral on strongly pseudo-convex manifolds.* **I, II**, Ann. of Math. **78** (1963) 112–148, **79** (1964) 450–472.

[4] ——, Série de conférences au colloque de l'Amer. Math. Soc. de Williamstown, Aout 1975.

[5] ——, *Boundary behavior of* $\bar{\partial}$ *on weakly pseudo-convex manifolds of dimension two*, J. Differential Geometry **6** (1972) 523–542.

[6] T. Bloom & I. Graham, A paraître.

[7] L. Hormander, *Hypoelliptic second order differential equations*, Acta Math. **119** (1967) 147–171.

[8] G. Komatsu, *Global analytic-hypoellipticity of the* $\bar{\partial}$*- Neumann problem*, Tôhoku Math. J. **28** (1976) 145–156.

[9] T. Nagano, *Linear differential systems with singularities and an application to transitive Lie algebras*, J. Math. Soc. Japan **18** (1966) 398–404.

[10] E. C. Zaghmanoglou, *Propagation of zeros and uniqueness in Cauchy problem*, Arch Rational Mech. Anal. **38** (1970) 178–188.

Université de Rouen, France